Correction Mine-ponts algèbre 2011

A- Décomposition de Dunford

1. Application du lemme de noyaux.

2. La stabilité des F_i par f est immédiat. La matrice de f dans une base adaptée a la decomposition de noyaux est diagonale par blocs. Chaque bloc est la matrice de f_i. Notons π_i (resp χ_i) le polynôme minimale (resp caractéristique) de f_i. Comme $P_i(f_i)(x) = (f - \lambda_i I)^{\alpha_i}(x) = 0$ pour tout $x \in F_i$ alors $P_i(f_i) = 0$ et donc π_i / P_i pour tout i. D'autre part $P_i \wedge P_j = 1$ entraine que $\pi_i \wedge P_j = 1$ (π_i et P_i ont les mêmes facteurs irréductibles). Le lemme de Gauss permet d'affirmer que χ_i / P_i. Comme $P_1.P_2..P_r = \chi_1.\chi_2..\chi_r$, on conclut que χ_i / P_i, soit $\chi_i = P_i$.

3. Soit β une base adaptée a la décomposition alors la matrice A' de f dans β est diagonla par blocs. En écrivant $f_i = \lambda_i I + n_i$ où $n_i = f - \lambda_i I$ qui est nilptent, la matrice de f_i s'écrit $\lambda_i I + N_i$ où N_i est nilpotente.

4. Il existe une matrice inversible P telqua $A = PA'P^{-1}$. d'autre part $A' = D + N$ où $D' = diag(\lambda_1..\lambda_1\lambda_2..\lambda_2...\lambda_r)$ et N' est la matrice nilpotente définie par

$$N' = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & N_2 & \\ & & \\ & & N_r \end{bmatrix}$$

   Parsuite $A = PD'P^{-1} + PN'P^{-1} = D + N$ où $D = PD'P^{-1}$ qui est diagonalisable et $N = PN'P^{-1}$ qui est nilpotente puisque $N^k = PN'^kP^{-1}$. Comme $N'D' = D'N'$ alors N et D commuttent.

B. Commutation et Conjugaison.

5. Pour tout $X \in M_n(\mathbb{C})$ on a

$$\begin{aligned} conj_{P^{-1}} \circ comm_A \circ conj_P(X) &= conj_{P^{-1}}(comm_A(PXP^{-1})) = \\ P^{-1}(APXP^{-1} - PXP^{-1}A)P &= comm_{P^{-1}AP}(X) \end{aligned}$$

   D'où $conj_{P^{-1}} \circ comm_A \circ conj_P = comm_{P^{-1}AP}$.

6. Notons $A = diag(\alpha_1...\alpha_n)$. On a $A.E_{ij} = \alpha_j E_{i,j}$ et $E_{ij}.A = \alpha_i E_{i,j}$. Parsuite $comm_A(E_{ij}) = (\alpha_j - \alpha_i)E_{i,j}$ et parsuite $E_{i,j}$ est un vecteur propre de $comm_A$. Dans la base canonique de $M_n(\mathbb{C})$ la matrice de $comm_A$ est diagonale dont les valeurs propres sont $(\alpha_j - \alpha_i)_{1 \leq i,j \leq n}$.

7. Si A diagonalisable alors $A = P^{-1}DP$ où D est diagonale et P est inversible. D'aprés 6 on a $conj_{P^{-1}} \circ comm_D \circ conj_P = comm_A$. Remarquons que $conj_P$ est un automorphisme de $M_n(\mathbb{C})$ et $(conj_P)^{-1} = conj_{P^{-1}}$ La matrice C_A de $comm_A$ dans la base canonique s'écrit $C_A = M.C_D.M^{-1}$ où M la matrice de $conj_P$ est C_D la matrice de $comm_D$ qui est diagonale.

8. Soient φ_1 et φ_2 les deux endomorphismes définies sur $M_n(\mathbb{C})$ par $\varphi_1(X) = AX$ et $\varphi_2(X) = XA$. Alors $\varphi_1^k(X) = A^k X$ et $\varphi_2^k(X) = XA^k$ ce qui montre que les deux endomorphismes φ_1 et φ_2 sont nilpotents, comme $\varphi_1 \circ \varphi_2 = \varphi_2 \circ \varphi_1$ on en déduit que $comm_A = \varphi_1 - \varphi_2$ est nilpotent.
Une deuxième méthode est de montrer Par récurrence sur k on montre que pour tout X ona
$$(comm_A)^k(X) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i . A^{k-i} X A^i$$
Comme $A^p = 0$ pour tout $p \geq n$ alors $(comm_A)^{2n} = 0$.

9. Si $comm_A = 0$ alors A commuttent avec toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ et donc A est une homothétie i.e: $A = \lambda . I_n$. Si de plus A est nilpotente alors $\lambda = 0$ et A est donc nulle.

10. Si $A = D + N$ la décomposition de Dunford alors $comm_A = comm_D + comm_N$. D'aprés les questions 8 et 9 on a $comm_D$ est diagonalisable et $comm_N$ est nilpotente . resta a montrer que $comm_D \circ comm_N = comm_N \circ comm_D$ est cela découle facilement du fait que D et N commuttent. Ceci montre que $comm_A = comm_D + comm_N$ est la décomposition de Dunford de $comm_A$. Si $comm_A$ est diagonalisable on auras donc $comm_A = comm_D$ et $comm_N = 0$ (par unicité du decomposition), d'aprés 10 la matrice N est la matrice nulle parsuite, $A = D$ diagonalisable.
Conclusion.: A diagonalisable si et seulement si $comm_A$ est diagonalisable.

C. Formes bilinéaires sur un espace vectoriel complexe.

11. Si u est diagonalisable alors dans une base de vecteurs propres la matrice de u est diagonale $\begin{bmatrix} 0.I_{n_1} & & \\ & \alpha_1 & \\ & & \alpha_k \end{bmatrix}$ et donc la matrice de u^2 est $\begin{bmatrix} 0.I_{n_1} & & \\ & \alpha_1^2 & \\ & & \alpha_k^2 \end{bmatrix}$ donc $\ker u = \ker(u^2)$.
Si $\ker u = \ker u^2$, soit $x = u(z) \in \operatorname{Im} u \cap \ker u$ donc $z \in \ker u^2 = \ker u$ d'où $u(z) = x = 0$.

12. Supposons que $\sum_{i=1}^q \lambda_i \varphi_i = 0$ alors pour tout $x \in E$, $b(\sum_{i=1}^q \lambda_i \varepsilon_i, x) = 0$. Comme b est non dégénérée, on obtient $\sum_{i=1}^q \lambda_i \varepsilon_i = 0$ et les λ_i sont tous nuls.

13. Soit $x \in F^\perp$, $x = \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_p e_p$. On a $\varphi_i(x) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq q$ donc $\lambda_i = 0$ parsuite $x = \lambda_{q+1} e_{q+1} + ..\lambda_p e_p$. Ceci montre que la famille $(e_{q+1}, ..e_n)$ engendre $F^\perp$ et donc base de $F^\perp$, il s'ensuit que $\dim F + \dim F^\perp = p$.

D:Critères de Klarès

14. On a $tr(XY) = tr(YX)$ donc φ est symétrique, bilineaire. Si $tr(Xy) = 0$ pour tout $Y \in M_n(\mathbb{C})$ donc $tr(X.E_{ij}) = x_{ji} = 0$ où x_{ij} est le coefficient de X d'indice i, j, ceci pour tous $1 \leq i, j \leq n$ donc $X = 0$.

15. Soit $Y \in \operatorname{Im}(comm_A)$ donc $Y = AX - XA$ pour un certain $X \in M_n(\mathbb{C})$. Soit $Z \in \ker(comm_A)$, $\varphi(YZ) = tr(AXZ) - tr(XAZ) = tr(XZA) - tr(XAZ) = 0$ car $AZ = ZA$. Ceci montre que $\operatorname{Im}(comm_A) \subset (\ker(comm_A))^\perp$. D'autre part $\dim(\ker(comm_A))^\perp = n^2 - \dim\ker(comm_A) = \dim \operatorname{Im}((comm_A))$ (question 14).

16. Il suffit de montrer que $A \in (\ker(comm_A))^{\perp}$. Soit $Z \in \ker(comm_A)$ donc $AZ = ZA$ par suite la matrice AZ est nilpotente donc $tr(AZ) = 0 = \varphi(A, Z)$. Parsuite $A \in \mathrm{Im}(comm_A)$, d'où l'existence d'une matrice X telque $A = comm_A(X)$.
$Comm_{A+\lambda I_n}(X) = comm_A(X) = A$.

17. Soient D et N comme dans la question 4. On a $D = P \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} & 0.. & 0 \\ 0 & & \\ 0 & \lambda_2 I_{\alpha_2} & \\ 0 & 0.. & \lambda_r I_{\alpha_r} \end{bmatrix} P^{-1}$

et $N = P \begin{bmatrix} N_1 & 0.. & 0 \\ 0 & & \\ 0 & N_2 & \\ 0 & 0.. & N_r \end{bmatrix} P^{-1} = PN'P^{-1}$. D'aprés la question précédente, il existe

$X_i \in M_{\alpha_i}(\mathbb{C})$ telque $comm_{N_i+\lambda_i I_{\alpha_i}}(X_i) = N_i$. Soit $Y = \begin{bmatrix} X_1 & 0.. & 0 \\ 0 & & \\ 0 & X_2 & \\ 0 & 0.. & X_r \end{bmatrix}$, on a donc

$comm_{A'}(Y) = N'$. D'aprés la question 5.on a

$$conj_{P^{-1}} \circ comm_A \circ conj_P(Y) = comm_{A'}(Y) = N'$$

Ce qui montre que $comm_A(X) = PN'P^{-1} = N$ où $X = conj_P(Y)$.

18. Supposons que $\ker(comm_A) = \ker((comm_A)^2)$ montrons que A est diagonalisable. Soit $A = N + D$ la décomposition de Dunford de A, alors d'aprés la question précédente $N \in \mathrm{Im}(comm_A)$ d'autre part $N \in \ker(comm_A)$ en effet $AN = (D + N)N = DN + N^2 = ND + N^2 = NA$. la question 11 montre alors que $N = 0$ et A est diagonalisable. Inversement si A est diagonalisable alors $comm_A$ est aussi diagonalisable (d'aprés 10) et donc $\ker(comm_A) = \ker((comm_A)^2)$.