Correction de prémière épreuve de mathématiques

Mines-Ponts 2010

Proposée par Jamel Jaber

A. Prolongement harmonique

1. **I**l suffit de montrer la convergence de deux séries entières $\sum_{n\geq 1} c_n z^n$ et $\sum_{n\geq 1} c_{-n} z^n$. Comme $|c_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ où $M = \sup\{|f(z)| : z \in T\}$ alors les rayons de convergence de ce deux série sont supérieures où égales à 1.

2. Posons $\widetilde{S}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x+iy)^n$ pour tout $(x,y) \in \widetilde{D}$. Soit $f_n(x,y) = a_n(x+iy)^n$, f_n admet une dérivé partielle par rapport a x et on a
$$\frac{\partial f_n}{\partial x}(x,y) = na_n(x+iy)^{n-1}$$
qui est continue . Soit K un compact de $\widetilde{D}$, alors il existe $M < 1$ tel que $K \subset D(0,M)$. On a donc $\left|\frac{\partial f_n}{\partial x}(x,y)\right| \leq n\,|a_n|\,M^{n-1}$. Comme la série $\sum_{n\geq 1} n\,|a_n|\,M^{n-1}$ converge donc la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\partial f_n}{\partial x}(x,y)$ converge normalement et donc uniformément sur K. D'aprés le théorème de dérivation terme à terme on a S admet une dérivé partielle par rapport a x et on a $\frac{\partial \widetilde{S}}{\partial x}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x+iy)^{n-1}$.

3. Le même calcul montre que $\widetilde{S}$ admet des dérivés prémières et secondes qui sont tous continues et on a
$$\frac{\partial \widetilde{S}}{\partial x}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x+iy)^{n-1},\ \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial y}(x,y) = i.\frac{\partial \widetilde{S}}{\partial x}(x,y)$$
$$\frac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial x^2}(x,y) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x+iy)^{n-2} \text{ et } \frac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial x^2}(x,y),$$
donc S est C^2 et $\Delta S(z) = 0$.

4. Ecrivons $g_f(z) = S(z) + H(\overline{z})$ où $S(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ et $H(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^n$. D'aprés 3 on a S et H sont C^2 sur D et on a $\Delta S(z) = \Delta T(z) = 0$. L'application $R : z \longrightarrow \overline{z}$ est C^2 sur $\mathbb{C}$, parsuite la fonction $p : z \longrightarrow H(\overline{z})$ est C^2. Montrons que $\Delta P(z) = 0$. On a $\widetilde{P}\ (x,y) = \widetilde{T}(x,-y)$ donc
$$\begin{aligned} \frac{\partial \widetilde{P}}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial x}(x,-y), \frac{\partial^2 \widetilde{P}}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,-y) \\ \frac{\partial \widetilde{P}}{\partial y}(x,y) &= -\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial x}(x,-y) \text{ et } \frac{\partial^2 \widetilde{P}}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}(x,-y) \end{aligned}$$

D'où

$$\Delta P(z) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,-y) + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}(x,-y) = \Delta T(\overline{z}) = 0.$$

Parsuite $\Delta g_f(z) = \Delta S(z) + \Delta P(z) = 0$.

5. Remarquons d'abord que $P_z(t) = \dfrac{1-|z|^2}{|1-e^{-it}z|^2}$. Pour tout $z \in D$ on a

$$g_f(z) = \frac{1}{2.\pi}[\sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}).(e^{-it}z)^n dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}).(e^{it}\overline{z})^n dt]$$

Comme $|e^{it}\overline{z}|^n = |e^{-it}z|^n = |z|^n$ et $|z| < 1$ alors les deux séries $\sum (e^{-it}z)^n$ et $\sum (e^{it}\overline{z})^n$ convergent uniformément (normalement) sur $[-\pi, \pi]$ ce qui nous permet d'invertir les signes $\int$ et $\sum$, on obtient donc

$$\begin{aligned} g_f(z) &= \frac{1}{2.\pi}[\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}).\sum_{n=0}^{\infty}(e^{-it}z)^n dt + \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}).\sum_{n=1}^{\infty}(e^{it}\overline{z})^n dt] \\ &= \frac{1}{2.\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})(\frac{1}{1-e^{-it}z} + \frac{e^{it}\overline{z}}{1-e^{it}\overline{z}})dt \\ &= \frac{1}{2.\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})(\frac{1-|z|^2}{|1-e^{-it}z|^2}dt \\ &= \frac{1}{2.\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})P_z(t)dt. \end{aligned}$$

6. Si $f = p_n$ alors $c_k = 0$ si $k \neq n$ et $c_n = 1$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, donc $g_f = z^n$ si $f = p_n$ et $g_f = \overline{z}^n$ si $f = q_n$.

   $\frac{1}{2.\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_z(t)dt = g_{p_0}(z) = 1$. On a $P_z(t) = \dfrac{1-|z|^2}{|1-e^{-it}z|^2} > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

7. Si f_n converge uniformément vers f sur T. Soit $\varepsilon > 0$,

   il existe N tel que pour tout $n \geq N$ on a $|f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon$ pour tout $z \in T$. D'autre part on a pour tout $z \in D$ et $n \geq N$:

$$|g_{f_n}(z) - g_f(z)| \leq \frac{1}{2.\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|f_n(e^{it}) - f(e^{it})\right| P_z(t)dt \leq \varepsilon\frac{1}{2.\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_z(t)dt = \varepsilon$$

   D'où $|G_{f_n}(z) - G_f(z)| \leq \varepsilon$ pour $n \geq N$ CQFD.

8. Soit f une fonction continue sur T, la fonction $\psi(t) = f(e^{it})$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, 2π périodique, alors il existe une suite des polynômes trigonométriques $e_n(t) = \displaystyle\sum_{k=-N_n}^{N_n} \alpha_k e^{ikt}$ qui converge uniformément vers ψ. La suite f_n de $\mathcal{P}(T)$ définie par $f_n(z) = \displaystyle\sum_{k=-N_n}^{N_n} \alpha_k z^k$ converge uniformément vers f.

On a $G_{p_n}(z) = z^n$ et $G_{q_n}(z) = \overline{z}^n$, pour tout $z \in \overline{D}$, donc G_{p_n}et G_{q_n} sont continues sur $\overline{D}$ et par linéarité de l'application $f \longrightarrow G_f$, on en déduit que G_f est continue pour tout $f \in \mathcal{P}(T)$. Soit $f \in C(T)$, il existe une suite d'élements f_n de $\mathcal{P}(T)$ qui converge uniformément vers f. D'aprés 7, la suite des fonctions continues G_{f_n}converge uniformément sur $\overline{D}$ vers G_f et parsuite G_f est continue.

9. Soit $\varepsilon > 0$, $\widetilde{u}(x,y) = G(x,y) + \varepsilon(x^2+y^2)$. On a pour tout $z \in D$, $\Delta G(z) = 0$ donc $\Delta u(z) = 4\varepsilon > 0$.

   Comme u est continue sur $\overline{D}$ qui est compact de $\mathbb{C}$, donc il existe $z_0 \in \overline{D}$ tel que $u(z) \leq u(z_0)$ pour tout $z \in \overline{D}$. Montrons que $z_0 \in T$, sinon, z_0 sera un point critique et la matrice hessienne de $\widetilde{u}$ au point $z_0 = (x_0, y_0)$ (la matrice de $d^2\widetilde{u}(x_0,y_0)$) sera définie négative et par suite sa trace $\Delta u(z_0)$ sera négative contradiction. Donc $z_0 \in T$ et par suite $u(z) \leq G(z_0) + \varepsilon = \varepsilon$.

10. Si f est la fonction nulle et G a valeurs réelles, alors on a montré que pour tout $\varepsilon > 0$ on a $G(z) \leq u(z) \leq \varepsilon$ ce qui montre que $G(z) \leq 0$ pour tout $z \in \overline{D}$. La fonction $-G$ vérifie les mêmes conditions que G et parsuite $G(z) \geq 0$, d'où $G(z) = G_f(z) = 0$.

    Si f est la fonction nulle et G a valeurs complexes alors les deux fonctions $\mathrm{Re}(G)$ et $\mathrm{Im}(G)$ vérifient les conditions $(\mathbf{a}_1)$, $(\mathbf{a}_2)$ et $(\mathbf{a}_3)$ et d'aprés le cas précedente $\mathrm{Re}(G) = \mathrm{Im}(G) = 0$, $G = 0 = G_f$.

    Si $k \in C(T)$, Montrons que $G = G_k$. On a $H = G - G_k$ vérifie les conditions $(\mathbf{a}_1)$, $(\mathbf{a}_2)$ et $(\mathbf{a}_3)$ pour la fonction nulle et donc $G - G_k = 0$.

B. Deux applications

11. Un simple calcul montre que $\Delta G(z) = 0$. On a G vérifie les conditions $(\mathbf{a}_1)$, $(\mathbf{a}_2)$ et $(\mathbf{a}_3)$ pour la fonction $f(e^{it}) = e^{\cos(t)}\cos(\sin t)$ par suite $G(z) = G_f(z) = c_0 + \sum\limits_{n=1} c_n z^n + \sum\limits_{n=1} c_{-n}\overline{z}^n$ pour tout $z \in \overline{D}$, la parité de f montre que

    $$c_n = c_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos(t)}\cos(\sin t)\cos(nt)dt \text{ pour tout } n \geq 1$$

    Pour $z = x \in [-1,1]$ on obtient

    $$G(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2.c_n x^n$$

    l'unicité du developpement en série entière montre que $c_0 = 1$ et que $c_n = \dfrac{1}{2.n!}$.

12. Supposons que u est C^2 et que $\Delta u(z) = 0$, soit $R > 0$, posons $G(z) = u(a + R.z)$ pour tout $z \in \overline{D}$. On a G vérifie les conditions $(\mathbf{a}_1)$, $(\mathbf{a}_2)$ et $(\mathbf{a}_3)$ pour la fonction $f(e^{it}) = u(a + R.e^{it})$, d'aprés 5 on a

    $$u(a+R.z) = G(z) = G_f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(a+R.e^{it})P_z(t)dt \text{ pour tout } z \in D$$

Si $z \in D(a,R)$ alors $\frac{z-a}{R} \in D$ et par suite

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(a+R.e^{it})P_{\frac{z-a}{R}}(t)dt$$

Réciproquement, On suppose que $u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(a+R.e^{it})P_{\frac{z-a}{R}}(t)dt$,donc

$$G(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(a+R.e^{it})P_z(t)dt$$

pour tout $z \in D$. Ecrivons

$$\begin{aligned} 2P_z(t) &= \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} + \frac{e^{-it}+\overline{z}}{e^{-it}-\overline{z}} = \frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z} + \frac{1+e^{it}\overline{z}}{1-e^{-it}\overline{z}} \\ &= (1+e^{-it}z)\sum_{n=0}^{\infty} e^{-int}z^n + (1+e^{it}\overline{z})\sum_{n=0}^{\infty} e^{-int}\overline{z}^n \\ &= 2(1+\sum_{n=1}^{\infty} e^{-int}z^n + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-int}\overline{z}^n) \end{aligned}$$

Parsuite

$$G(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(a+R.e^{it})(1+\sum_{n=1}^{\infty} e^{-int}z^n + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-int}\overline{z}^n)dt = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\overline{z}^n$$

d'aprés 1 on a G est C^2 sur D et $\Delta G(z) = 0$, De même pour $u(z) = G(\frac{z-a}{R})$. Donc u est C^2 sur $D(a,R)$ et $\Delta u(z) = 0$ ceci pour tout R tel que $\overline{D}(a,R) \subset U$, ce qui montre le résultat sur U.

13. Si u_n converge uniformément vers u, alors

$$\begin{aligned} u(z) &= \lim u_n(z) = \lim \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_n(a+R.e^{it})P_{\frac{z-a}{R}}(t)dt = \\ & \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \lim u_n(a+R.e^{it}).P_{\frac{z-a}{R}}(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(a+R.e^{it})P_{\frac{z-a}{R}}(t)dt \end{aligned}$$

Ce qui montre que u est C^2 et $\Delta u(z) = 0$.

C.Propriétés duales.

14. On a évidament φ_z est une forme $\mathbb{C}$-lineaire , elle vérifie (C_2) et (C_3) d'aprés 6. D'autre part on a

$$|\varphi_z(f)| = |g_f(z)| \le N(f).\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_z(t)dt = N(f)$$

15. Si φ vérifie (C_2) et (C_3) alors on aura $\varphi(f) = \varphi_z(f)$ pour tout $f \in \mathcal{P}(T)$, la densité de $\mathcal{P}(T)$ dans $\mathcal{C}(T)$ et la continuité de φ et φ_z montre que $\varphi(f) = \varphi_z(f)$ pour tout $f \in \mathcal{C}(T)$.

16. On a pour tout $z \in T$
$$|h(z)| = ((2f(z) - N(f))^2 + \lambda^2)^{\frac{1}{2}} \leq (N(f)^2 + \lambda^2)^{\frac{1}{2}}$$
Il existe $z_0 \in T$ tel que $f(z_0) = N(f)$ ($f(z) \geq 0$), parsuite $|h(z_0)| = (N(f)^2 + \lambda^2)^{\frac{1}{2}}$. On a alors $N(h) = (N(f)^2 + \lambda^2)^{\frac{1}{2}}$ d'où $N(h)^2 = N(f)^2 + \lambda^2$.

17. On a $|\varphi(h)|^2 \leq N(f)^2 + \lambda^2$, or $\varphi(h) = 2.\varphi(f) - N(f) + i\lambda$ (On a utilisé la $\mathbb{C}$-linéarité et que $\varphi(1) = 1$). Ecrivons
$$\begin{aligned} \left|\varphi(h)^2\right| &= 4\,|\varphi(f)|^2 + |-N(f) + i\lambda|^2 + 4.\operatorname{Re}((-N(f) - i\lambda)\varphi(f)) \\ &= 4\,|\varphi(f)|^2 + N(f)^2 + \lambda^2 - 4N(f)\operatorname{Re}(\varphi(f)) + 4\lambda\operatorname{Im}(\varphi(f)) \leq N(f)^2 + \lambda^2 \end{aligned}$$
On obtient $4\,|\varphi(f)|^2 - 4N(f)\operatorname{Re}(\varphi(f)) + 4\lambda\operatorname{Im}(\varphi(f)) \leq 0$, ceci pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, donc $\operatorname{Im}(\varphi(f)) = 0$ et parsuite $\varphi(f) \in \mathbb{R}$.

    On aura donc $0 \leq 4\,|\varphi(f)|^2 - 4N(f)\varphi(f) \leq 0$, donc $\varphi(f) = N(f) \geq 0$.

18. Si $f : T \longrightarrow \mathbb{R}$ continue on peut ecrire $f = f_1 - f_2$ où f_1 et f_2 sont continues sur T est a valeurs dans $\mathbb{R}^+$ ($f_1 = \dfrac{|f| + f}{2}$et $f_2 = \dfrac{|f| - f}{2}$). donc $\varphi(f) = \varphi(f_1) - \varphi(f_2) \in \mathbb{R}$.

    Si $f : T \longrightarrow \mathbb{C}$ continue alors $f = \operatorname{Re}(f) + i\operatorname{Im}(f)$ où $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont a valeurs réelles donc on aura $\varphi(f) = \varphi(\operatorname{Re}(f)) + i.\varphi(\operatorname{Im}(f))$ et parsuite $\overline{\varphi(f)} = \varphi(\operatorname{Re}(f)) - i.\varphi(\operatorname{Im}(f)) = \varphi(\overline{f})$.

    On en déduit donc que φ vérifie (C_3) puisque $\varphi(q_n) = \varphi(\overline{p_n}) = \overline{\varphi(p_n)} = \overline{z}^n$, et donc $\varphi = \varphi_z$ d'aprés 15.